

Старт-лига. Первый тур. 22.09.2026

1. Изначально на доске написано число  $-3$ . Разрешается дописать на доску число  $xy + z$ , если числа  $x, y, z$  уже написаны на доске (при этом  $x, y, z$  не обязательно различные). Может ли когда-нибудь на доске появиться число 0?
2. Известно, что правильный треугольник со стороной  $n$  можно разбить на несколько правильных треугольников со стороной 2 и несколько правильных треугольников со стороной 3. Обязательно ли  $n$  делится на 2 или на 3?
3. В некоторых клетках таблицы  $n \times n$  стоит по фишке (фишек хотя бы две). Для каждой фишки посчитали произведение количества фишек в её строке и количества фишек в её столбце. Докажите, что среди посчитанных произведений найдутся два равных.
4. На медиане  $AK$  треугольника  $ABC$  нашлась точка  $T$  такая, что  $\angle ABT = \angle ACT$ . Следует ли отсюда, что  $ABC$  равнобедренный?
5. За круглым столом сидят 13 детей. Мальчик говорит правду мальчику и лжёт девочке; девочка говорит правду девочке и лжёт мальчику. Первый ребёнок говорит соседу справа: «Большинство из нас — мальчики», следующий: «Большинство из нас — девочки», и так далее. Фразы чередуются (последняя фраза снова про большинство мальчиков). Сколько за столом было мальчиков?
6. Первый игрок загадывает натуральное число  $n \leq 10^{10}$ . Второй игрок за одну попытку называет произвольное натуральное число  $m$ . Если  $m = n$ , второй игрок выигрывает. Если  $m \neq n$ , то число  $n$  заменяется на сумму цифр числа  $nm$ , после чего игра продолжается по тем же правилам. Какое наименьшее число попыток достаточно второму игроку, чтобы гарантированно выиграть?
7. Найдите все пары вещественных чисел  $(a, b)$ , при которых выражение
$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 2(a + 1)(3b + 1)$$
принимает наименьшее возможное значение.
8. Даны два 2026-угольника  $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$  и  $B_1, B_2, \dots, B_{2026}$ . Проведены все их стороны, а также отрезки  $A_i B_i$  для  $i = 1, 2, \dots, 2026$ . Сколько существует замкнутых маршрутов по проведённым рёбрам, которые начинаются в  $A_1$ , проходят через каждую из остальных 4051 вершин ровно один раз и возвращаются в  $A_1$ ? Два противоположных направления одного маршрута считаются различными.