

Второй тур. Гранд. 23.09.2026.

1. Диагонали описанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Обозначим через  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$  радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $AOB, BOC, COD$  и  $DOA$  соответственно. Известно, что  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ . Докажите, что  $ABCD$  — дельтоид.
2. Пусть  $a$  — натуральное число. Зададим последовательность  $a_1, a_2, \dots$  условиями (1)  $a_1 = a$ ; (2)  $a_{n+1} = a_n/2$ , если  $a_n$  чётно; и (3)  $a_{n+1} = a_n^2 + 3$ , если  $a_n$  нечётно. Найдите все натуральные числа  $a$ , для которых получившаяся последовательность ограничена.
3. Для натурального числа  $n$  рассмотрим все способы окрасить все клетки квадрата  $2n \times 2n$  в красный и синий цвета так, что (1) любые две одноцветные клетки можно соединить путём по клеткам того же цвета, переходящим из клетки в клетку, имеющую с ней общую сторону; и (2) фигуры, образованные красными и синими клетками, равны. Обозначим через  $A(n)$  количество таких способов. Докажите, что существуют положительные числа  $c$  и  $d$ , не зависящие от  $n$ , для которых

$$2^{cn^2} \leq A(n) \leq 2^{dn^2}$$

при всех натуральных  $n$ .

4. Даны простое число  $p$  и натуральное число  $a$  такие, что  $a - 1$  не делится на  $p$ . Положим

$$n = 1 + a^p + a^{2p} + \dots + a^{(p-1)p}.$$

Докажите, что  $a^n - a$  делится на  $n$ .

5. Пусть  $n$  — натуральное число, а  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — произвольные действительные числа. Докажите, что найдётся неотрицательное целое  $k$ , не превосходящее  $n$ , такое, что для всех  $x \in [0, 1]$  выполнено неравенство

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \leq a_0 + a_1 + \dots + a_k.$$

6. Высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что отрезок  $PQ$  проходит через  $H$ . Перпендикуляр к  $AB$ , проведённый через  $P$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $X$ ; перпендикуляр к  $AC$ , проведённый через  $Q$ , пересекает сторону  $BC$  в отличной от  $X$  точке  $Y$ . Отрезки  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $XYZ$  и  $ABC$ , касаются.
7. Дан граф на  $n \geq 2$  вершинах, в каждом подграфе которого есть вершина степени, не превосходящей 3. Докажите, что можно удалить из этого графа не более  $n - 2$  рёбер так, чтобы в оставшемся графе не было нечётных циклов.
8. Даны две параллельные прямые. На одной из них отмечены 100 красных точек, а на другой — 100 синих. Проведены все отрезки, у которых один конец красный, а другой синий; каждая неокрашенная точка, лежащая хотя бы на двух проведённых отрезках, красится зелёным. При каком наибольшем  $k$  может оказаться, что  $k$  различных зелёных точек лежат на одной прямой?