

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Юниор–лига первая. 2 тур. 23.09.2026

1. Можно ли клетки бесконечной шахматной доски раскрасить в 100 цветов так, чтобы в каждом клетчатом квадрате разница между количеством клеток любых двух цветов не превышала 1?

2. AD — высота остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью Γ , причём $AD = BC$. Точка M — середина отрезка CD , а биссектриса угла ADC пересекает прямую AC в точке N . Точка P лежит на окружности Γ так, что прямые BP и AC параллельны. Прямые DN и AM пересекаются в точке F , а прямая PF снова пересекает окружность Γ в точке Q . Найдите отношение углов $\angle PND/\angle PQD$.

3. Дан граф на $n \geq 2$ вершинах, в каждом подграфе которого есть вершина степени не более 3. Докажите, что можно удалить из этого графа не более $n - 2$ рёбер так, чтобы оставшийся граф был двудольным.

4. Даны простое число p и натуральное число a такие, что $a - 1$ не делится на p . Положим $n = 1 + a^p + a^{2p} + \dots + a^{(p-1)p}$. Докажите, что $a^n - a$ делится на n .

5. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, в котором $AB = \sqrt{6}$ и $AD = \sqrt{2}$. Пусть E — точка на диагонали BD такая, что $\angle EAB = 15^\circ$, а F — точка на стороне CD такая, что $AE \perp EF$. Найдите периметр четырёхугольника $ADFE$.

6. У натурального числа n ровно $k > 3$ делителей (считая 1 и n). Известно, что для любых двух делителей n , меньших n , можно найти третий делитель n (возможно, равный n), вместе с которым они образуют трёхчленную арифметическую прогрессию. Найдите все k , при которых это возможно.

7. Положительные числа a и b удовлетворяют равенству $(a+4)(b+1) = 24$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 13$.

8. На каждой из двух параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 выбрано по 100 точек. Каждая из 100 точек на ℓ_1 соединена отрезком с каждой из 100 точек на ℓ_2 . Какое наибольшее количество различных точек пересечения этих отрезков, не являющихся их концами, может лежать на одной прямой?