

Третий тур. Гранд. 25.09.2026.

1. Даны вещественные числа a и b . На координатной плоскости нарисовали параболу $y = x^2 + ax + b$ и выбрали на ней точки P и Q так, что окружность, построенная на PQ как на диаметре, касается этой параболы в точке, отличной от P и Q . Найдите все возможные значения длины проекции отрезка PQ на ось Ox .
2. Пусть $n \geq 20$ — натуральное число. Имеется неограниченный запас доминошек, на каждой из которых в одной клетке написано число 1, а в другой — число 2. Какое наименьшее количество таких доминошек нужно положить на клетчатую доску $n \times n$ так, чтобы каждая доминошка занимала ровно две клетки, разные доминошки не перекрывались, и в каждой строке и в каждом столбце сумма попавших туда чисел была не меньше 4?
3. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z , для которых

$$x(y^2 + 2z^2) = y(z^2 + 2x^2) = z(x^2 + 2y^2).$$

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O . На прямой BC отмечена точка R такая, что $RA = RD$. На прямой AD отмечена точка S такая, что $SB = SC$. Окружности, описанные около треугольников ABO и CDO , пересекаются в точке $K \neq O$. Докажите, что точка K лежит на прямой RS .
5. Пусть G — связный граф с хотя бы 10 вершинами. В его вершинах расставлены натуральные числа. За одну операцию можно увеличить два числа, находящиеся в вершинах, соединённых ребром, на 1. Обязательно ли можно за несколько операций получить расстановку, в которой все числа в вершинах попарно взаимно просты?
6. Даны $n \geq 2$ различных натуральных чисел. Докажите, что среди них найдутся два числа, наименьшее общее кратное которых не меньше $n^2/10^{100}$.
7. Пусть M — точка пересечения медиан остроугольного треугольника ABC , а P — точка на меньшей дуге BC его описанной окружности. Из точки P опустили перпендикуляр PQ на сторону BC . Точка X выбрана на прямой MQ так, что $AX \parallel BC$. Точка S — середина отрезка PX . Докажите, что $\angle PAB = \angle SAC$.
8. В каждой клетке клетчатого квадрата 2026×2026 нарисована стрелка. При этом выполняются следующие условия: (*) каждая стрелка параллельна одной из сторон квадрата, и из любых двух стрелок в клетках с общей стороной хотя бы одна не указывает на эту сторону. За ход разрешается стереть стрелку в одной клетке и нарисовать в ней новую стрелку с соблюдением условий (*). Назовём клетку *хорошей*, если, начав с неё и переходя каждый раз из клетки в соседнюю по направлению стрелки, можно выйти за пределы квадрата. При каком наименьшем k для любой начальной расстановки стрелок можно совершить не более k ходов так, чтобы все клетки стали хорошими?