

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок 20–28.09.2026

Юниор–лига первая. 3 тур. 25.09.2026

1. Точки B и D лежат на окружности Γ и симметричны относительно её диаметра AC . На отрезке AC выбрана точка E . Точки X и Y симметричны E относительно прямых AB и BC соответственно. Луч DE пересекает Γ в точке Z . Докажите, что точки X , Y и Z лежат на одной прямой.

2. Имеется неограниченный запас доминошек, у каждой из которых в одной клетке написано число 1, а в другой – число 2. Какое наименьшее количество таких доминошек нужно положить на клетчатую доску 300×300 (по клеткам и без перекрытий) так, чтобы в каждой строке и столбце сумма попавших туда чисел была не меньше 4?

3. Дано дерево с $n \geq 3$ вершинами. За один ход можно выбрать любые три вершины A , B и C такие, что B соединена рёбрами и с A , и с C , удалить ребро BC и провести ребро AC . Докажите, что не более чем за $2n - 5$ ходов можно получить из исходного дерева любое другое дерево на тех же вершинах. (Деревья с одним и тем же набором вершин считаются различными, если хотя бы одна пара вершин в одном из этих деревьев соединена ребром, а в другом – нет.)

4. Найдите все пары ненулевых целых чисел (a, b) , для которых выполняется равенство

$$(2a^2 + b)^3 = b^3 a.$$

5. Последовательность $A_1, A_2, A_3, \dots$ конечных непустых множеств натуральных чисел такова, что $|A_i \cap A_j| = (i, j)$ для любых (не обязательно различных) натуральных чисел i и j . Для каждого делителя d числа 250 в множестве A_d выбрали наибольший элемент. Может ли сумма выбранных чисел не превосходить 500?

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , а M – середина отрезка AB . Известно, что $\angle CMD = 90^\circ$ и $AD \perp BC$. Докажите, что точка, симметричная O относительно прямой AB , лежит на прямой CD .

7. На доске написано натуральное число. Разрешается увеличивать это число на 2026 или стирать в его десятичной записи две стоящие рядом одинаковые цифры (если такие есть). Докажите, что такими действиями можно получить на доске любое другое натуральное число.

8. Найдите наибольшее S такое, что для всех положительных чисел a , b и c выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{b^2 + ac}{a^2 - ac + c^2}} + \sqrt{\frac{a^2 + bc}{b^2 - bc + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + ab}{a^2 - ab + b^2}} > S.$$