

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Юниор-лига 2. 3 тур. 25.09.2026

1. Имеется неограниченный запас доминошек, у каждой из которых в одной клетке написано число 1, а в другой – число 2. Какое наименьшее количество таких доминошек нужно положить на клетчатую доску 300×300 (по клеткам и без перекрытий) так, чтобы в каждой строке и столбце сумма попавших туда чисел была не меньше 4?

2. На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $BD = CD$, а на отрезке BD – точка E так, что $CE = AB$. Найдите $\angle ABC$, если известно, что $AB + BE = AC$.

3. Дано дерево с $n \geq 3$ вершинами. За один ход можно выбрать любые три вершины A , B и C такие, что B соединена рёбрами и с A , и с C , удалить ребро BC и провести ребро AC . Докажите, что не более чем за $2n - 5$ ходов можно получить из исходного дерева любое другое дерево на тех же вершинах. (Деревья с одним и тем же набором вершин считаются различными, если хотя бы одна пара вершин в одном из этих деревьев соединена ребром, а в другом – нет.)

4. Петя придумал теорему о неравенстве: для всех натуральных чисел a , b и c выполняется неравенство

$$\frac{b^2 + ac}{a^2 - ac + c^2} + \frac{a^2 + bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c^2 + ab}{a^2 - ab + b^2} > 4.$$

Выясните, верна ли эта теорема.

5. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , для которых выполняется равенство

$$(2a^2 + b)^3 = b^3 a.$$

6. Треугольник ABC , в котором $AC < AB < BC$, вписан в окружность с центром O . Пусть AD – высота треугольника, M – середина BC , а K – проекция точки C на прямую AO . Докажите, что $MD = MK$.

7. На доске написано натуральное число. Разрешается увеличивать это число на 37 или стирать в его десятичной записи две стоящие рядом одинаковые цифры (если такие есть). Докажите, что такими действиями можно получить на доске любое другое натуральное число.

8. Есть 7 внешне одинаковых монет: 4 настоящие и 3 фальшивые. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые одинаково и легче настоящих. Каково наименьшее число взвешиваний на чашечных весах требуется, чтобы гарантированно указать хотя бы одну фальшивую монету?