

1. Между некоторыми парами из n городов есть двусторонние авиалинии, причем для любой пары городов A, B есть единственный путь без повторения авиалиний, ведущий из A в B ; расстоянием между городами A и B назовем количество авиалиний в таком пути от A до B . Известно, что наибольшее расстояние между парами городов равно d .

За ход разрешается выбрать некоторые три города A, B, C , для которых есть авиалинии AB и AC , убрать авиалинию AB и заменить ее на новую авиалинию BC . Докажите, что за $n - d - 1$ ходов можно добиться схемы авиалиний, представляющей собой цепь (т.е. авиалинии между парами городов $1 - 2, 2 - 3, \dots, (n - 1) - n$ для некоторой нумерации городов); а за меньшее количество ходов этого добиться нельзя.

2. Пусть дано натуральное число. Операция над этим числом позволяет прибавить к нему 2026 или удалить любые две одинаковые соседние цифры в десятичной системе счисления, если таковые имеются (если после такого удаления цифр получается число, начинающееся с нескольких нулей, то эти нули тоже стираются). Пусть a и b — два произвольных натуральных числа. Докажите, что если начать с числа a , то можно будет выполнить конечный набор операций, чтобы получить число b .

3. Каждая клетка таблицы 7×7 окрашена в один из трёх цветов. В каждом квадрате 2×2 встречаются все три цвета. Какое наибольшее число пар соседних по стороне клеток может быть одного цвета?

4. Петя придумал теорему о неравенстве: для всех натуральных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\frac{b^2 + ac}{a^2 - ac + c^2} + \frac{a^2 + bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c^2 + ab}{a^2 - ab + b^2} > 4.$$

Выясните, верна ли эта теорема.

5. Треугольник ABC , в котором $AC < AB < BC$, вписан в окружность с центром O . Пусть AD — высота треугольника, M — середина BC , а K — проекция точки C на прямую AO . Докажите, что $MD = MK$.

6. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , для которых выполняется равенство

$$(2a^2 + b)^3 = ab^3.$$

7. Двое играют в игру на квадратной решетке 99×99 , делая ходы по очереди. В свой ход игрок должен закрасить один из 100^2 узлов решетки (еще не покрашенный к этому моменту). Проигрывает игрок, после хода которого некоторые три покрашенных узла образуют треугольник площади меньше 5. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Есть 7 внешне одинаковых монет: 4 настоящие и 3 фальшивые. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые — одинаково и легче настоящих. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах требуется, чтобы гарантированно указать хотя бы одну фальшивую монету?